

**CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION
DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA
GENDARMERIE NATIONALE**

Ouvert aux candidats titulaires d'un diplôme ou titre conférant le grade de master ou d'un diplôme ou titre homologué ou enregistré au répertoire national des certifications professionnelles au niveau 7

- OG SCI -

SESSION 2023

ÉPREUVE DE CAS CONCRET

(Durée : 02 heures 30 – Coefficient : 08 – Note éliminatoire < 05/20)

Remarques préliminaires

- Le sujet propose un panel d'exercices de types différents. Ces exercices sont indépendants et peuvent donc être traités séparément par le candidat. **Trois exercices doivent être traités par le candidat avec les parties 1 et 2 obligatoires puis 1 exercice au choix parmi ceux présentés en partie 3.**
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les candidats sont encouragés à lire l'ensemble du sujet.
- Les énoncés des formules et théorèmes utiles sont fournis en annexe, les formules relevant des programmes de lycée sont toutefois réputées connues des candidats.
- Plusieurs questions demandent une explication qualitative, il est attendu des réponses claires et concises.
- Les explications des phénomènes interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- La présentation des copies importe, toute copie difficilement lisible pourra se voir sanctionner.

ANNEXE

- I – Formules nécessaires

Partie I Obligatoire : Étude de la capacité et de la congestion de l'autoroute A7

Remarques préliminaires

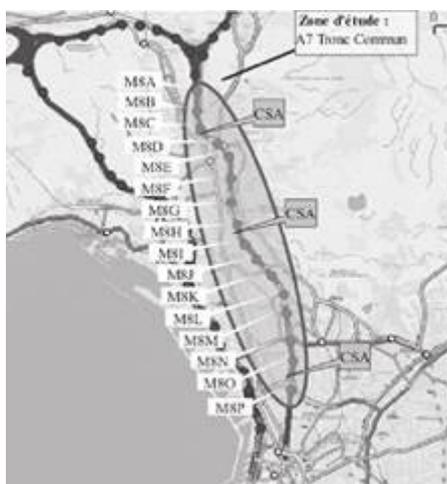
L'épreuve doit être traitée en langage Python. Les syntaxes sont rappelées en annexe.

Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur la copie à rendre (les brouillons ne seront pas acceptés).

Il existe plusieurs formes de congestions routières, selon leur cause : la congestion récurrente, la congestion « prévisible » (travaux, manifestation, météo) et la congestion due aux incidents et accidents, par définition imprévisibles. On s'intéresse ici au niveau de congestion récurrent qui peut être définie comme le surplus de demandes qui amène la congestion.

Cette exercice se focalise sur la congestion routière de l'autoroute A7 en France. La section étudiée ne comporte ni entrée ni sortie. La longueur de l'axe est de 8.5km et comporte 3 voies sauf au niveau de la dernière station (non étudiée ici). Un seul sens de circulation est étudié. La cartographie présentée sur la figure 1 donne l'implantation des différentes stations de mesure, de la station *M8A* à *M8P*, et des contrôles de sanction automatique (CSA). Ces stations de mesure font partie du système de recueil automatique des données (RAD) présent sur les autoroutes.

Pour réaliser les mesures, la chaussée est équipée de boucles électromagnétiques connectées aux stations qui remontent l'information vers un système central. Ces boucles permettent de compter le nombre de véhicules qui passent sur les routes et, dans le cadre de cette étude, il s'agit de boucles doubles qui permettent aussi d'estimer les vitesses.

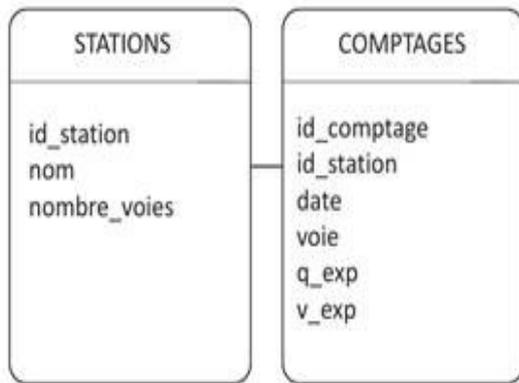


I. Exploitation des données de mesure

Sélection des mesures

L'ensemble des données produites par le réseau est archivé dans une base de données. Les variables d'intérêt moyennées par tranche de temps de 6min pour chaque point de mesure sont le débit q_{exp} , représentatif du nombre de véhicules par unité de temps et la vitesse moyenne v_{exp} des véhicules en ce point. On peut également accéder à la concentration, c_{exp} , par calcul étant donné que $c_{exp} = q_{exp}/v_{exp}$.

Une version simplifiée de cette base de données est réduite à deux tables.



La table **STATIONS** répertorie les stations de mesures ; elle contient les attributs :

- *id_station* (clé primaire), entier identifiant chaque station ;
- *nom*, chaîne de caractères désignant le nom de la station ;
- *nombre_voies*, entier donnant le nombre de voies de la section d'autoroute

La table **COMPTAGES** répertorie les différents enregistrements de données réalisés au cours du temps par les stations de comptage. Elle contient les attributs :

- *id_comptage*, entier identifiant chaque comptage ;
- *id_station*, entier identifiant la station concernée ;
- *date*, entier datant la mesure ;
- *voie*, entier numérotant la voie sur laquelle a été effectuée la mesure ;
- *q_exp*, flottant donnant le débit mesuré pendant 6 minutes ;
- *v_exp*, flottant donnant la vitesse moyenne mesurée pendant 6 minutes.

Question n°1. L'étude se focalise uniquement sur les mesures de l'une des stations, la *M8B*. Écrire une requête SQL qui renvoie les données de comptage (*id_comptage*, *date*, *voie*, *q_exp*, *v_exp*) mesurées à la station de comptage de nom *M8B*.

Le résultat de la requête précédente est stocké dans une nouvelle table **COMPTAGES_M8B** à cinq colonnes (*id_comptage*, *date*, *voie*, *q_exp*, *v_exp*).

On fait l'hypothèse que les mesures sur les différents voies d'une même station sont enregistrées de façon synchronisée. Lors d'un enregistrement pour une station à trois voies, on écrit donc trois lignes dans la table **COMPTAGES** avec trois dates identiques. Pour chacun des enregistrements de la station *M8B*, trois lignes avec trois dates identiques, sont donc présentes dans la nouvelle table **COMPTAGES_M8B**. Pour la suite de l'étude, les résultats expérimentaux de chacune des trois voies doivent être agrégés pour se ramener à une voie unique.

Question n°2. Écrire une requête SQL qui renvoie, pour chaque date des données de **COMPTAGES_M8B**, le débit correspondant à la somme des débits de chaque voie.

De la même façon, une requête SQL permet d'obtenir la moyenne des vitesses sur l'ensemble des trois voies pour chaque date des données de **COMPTAGES_M8B**. Il n'est pas demandé d'écrire cette requête. Ainsi, dans la suite de l'étude, la portion d'autoroute sera simplifiée en ne considérant qu'une seule voie.

Diagramme fondamental

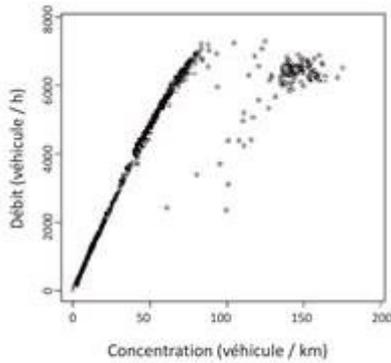


Figure 2 – Points de mesure M8B : diagramme fondamental (c_exp, q_exp)

On veut tracer le diagramme fondamental du tronçon d'autoroute étudié (figure 2). Suite au traitement de la base de données, on dispose à présent du tableau à une dimension (aussi appelé vecteur) des débits q_exp (en véhicules par heure) et du vecteur des vitesses v_exp (en km/h). Ces deux vecteurs possèdent $nb_mesures$ composantes avec $nb_mesures$ le nombre de points de mesure à tracer. Pour chaque composante i , la relation $c_exp[i] = q_exp[i]/v_exp[i]$ permet d'obtenir la concentration. L'utilisation des tableaux à une dimension (ou vecteurs) est rappelée en **annexe**.

Question n°3. Écrire une fonction trace (q_exp, v_exp) qui prend en arguments q_exp et v_exp et qui permet d'afficher le nuage de points du diagramme fondamental. On considérera que les bibliothèques sont importées et on pourra utiliser la fonction « plot » donnée en annexe.

II. Estimation de l'état de congestion

Au niveau d'une station de mesure, la situation est dite congestionnée lorsque les vitesses prises par les véhicules restent inférieures à 40 km/h et la situation est dite fluide lorsque les vitesses restent supérieures à 80 km/h.

Question n°4. La fonction $congestion(v_exp)$, qui prend en argument v_exp et renvoie la valeur médiane du tableau de valeurs v_exp est définie ci-dessous. La recherche de la médiane est basée sur un algorithme de tri. Choisir une des 4 propositions données pour compléter les 2 lignes manquantes (indiquées par « **ligne à compléter** »). Donner le nom, puis la complexité de l'algorithme de tri employé, dans le meilleur et le pire des cas. Analyser la pertinence de ce choix.

```
def congestion(v_exp):
    nbmesures=len(v_exp)
    for i in range(nbmesures):
        v=v_exp[i]
        j = i
        while 0 < j and v < v_exp[j-1]:
            ligne à compléter
            ligne à compléter
        v_exp[j] = v
    return v_exp[nbmesures//2]
```

Propositions pour les lignes manquantes :

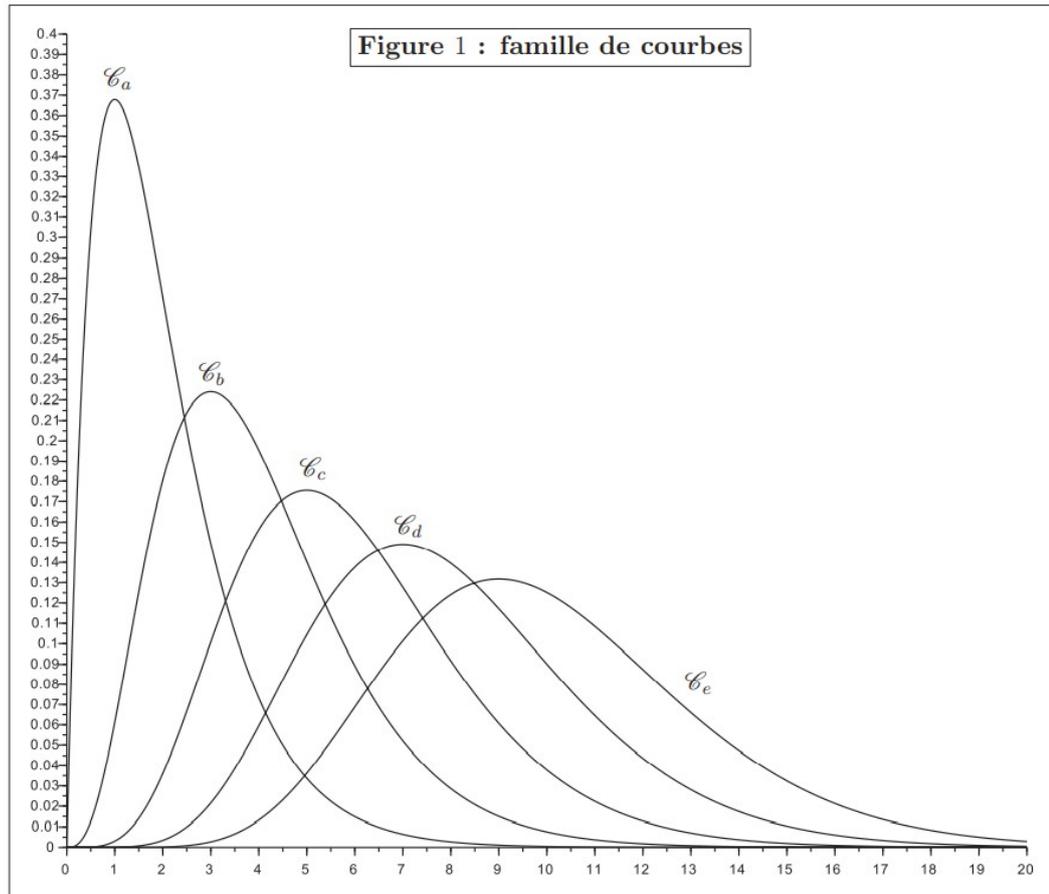
1. $v_exp[j-1] = v_exp[j]$
 $j = j-1$
2. $v_exp[j] = v_exp[j-1]$
 $j = j-1$
3. $v_exp[j+1] = v_exp[j]$
 $j = j+1$
4. $v_exp[j] = v_exp[j+1]$
 $j = j+1$

Question n°5. A partir de la base de données de la station M8B, on obtient le vecteur v_exp . On exécute la fonction $congestion(v_exp)$, la valeur retournée par la fonction étant 30, quelle conclusion peut-on tirer de ce résultat ?

Partie II Obligatoire : Analyse de fonction

On considère la fonction f et, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n , définies sur \mathbb{R}^+ par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+, f(t) = 0 \text{ et } f_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}.$$



Question 1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

1.a. Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variations de la fonction f_n sur \mathbb{R}^+ et en déduire son maximum.

1.b. Montrer que $f(n)_n f(n)_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{n^{1/2}}$ quand n tend vers $+\infty$.

1.c. Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^+ .

Question 2.

2.a. Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \text{ est convergente et vérifier que } \mathbb{R}_{+\square} \subset D.$$

2.b. Montrer que, pour l'intégrale $\int_0^{\infty} (\ln t) e^{-t} t^x dt$ est convergente.

2.c. Montrer que la fonction $x \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ .

2.d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

2.e. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\infty} f_n(t) dt = 1$.

Question 3. Dans la figure 1, on peut visualiser certaines des représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont celles de f_1 et f_5 .

Lesquelles des courbes C_a , C_b , C_c , C_d , ou C_e de la figure 1 correspond respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?

Partie III: Exercice au choix – Physique / chimie / mathématiques

Exercice 1 Physique - Rapport entre masse et autonomie d'un drone

Les drones de prise de vue sont utilisés dans de nombreux domaines aujourd'hui. En gendarmerie leurs utilisations sont multiples comme la surveillance de grands événements, la constatation de scènes de crimes, ...

La plupart d'entre eux utilisent une nacelle motorisée à 2 ou 3 axes asservis afin de stabiliser les images acquises par la caméra ou l'appareil photo embarqué. Le reste est composé des éléments de base d'un drone classique : structure légère en plastique ou en carbone, moteurs synchrones à aimants permanents (*brushless*) avec leur électronique de commande et de puissance et enfin une batterie.

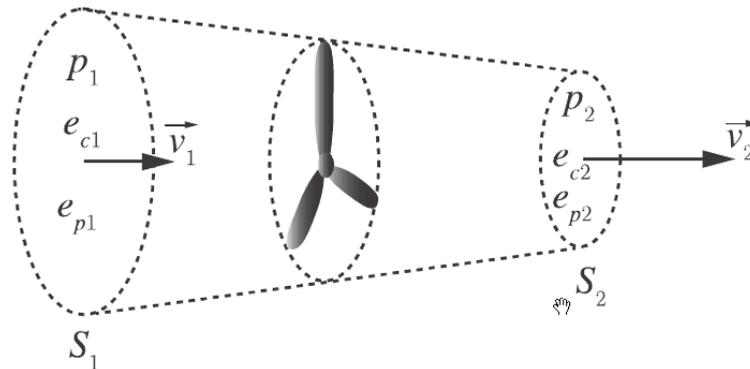
L'un des principaux inconvénients des drones de ce type reste leurs poids (comparativement aux drones classiques) surtout si l'on ajoute des accessoires afin de prendre des photos dans des conditions particulières (capteur infrarouge par exemple), et leur faible autonomie. Une réduction de la masse permettrait des vols plus dynamiques et une consommation inférieure. Les problématiques de réduction de masse et d'augmentation de l'autonomie sont donc liées.

Modélisation de la force de sustentation

La force nécessaire à la sustentation est obtenue à l'aide de plusieurs hélices mises en rotation par des moteurs synchrones à aimants permanents à rotor externe. Généralement au nombre de quatre, ils sont placés aux extrémités d'une structure en étoile et alimentés par batterie.

Bilans pour un fluide en écoulement permanent

On considère un fluide en écoulement permanent sous un débit massique D_m . On note \vec{v}_1 , p_1 , e_{c1} et e_{p1} , la vitesse, la pression, l'énergie cinétique massique et l'énergie potentielle au niveau de la section amont S_1 d'un tube de courant et \vec{v}_2 , p_2 , e_{c2} et e_{p2} , ces mêmes quantités sur la section aval S_2 (figure).



Un bilan d'énergie mécanique entre les sections S_1 et S_2 donne, pour un écoulement homogène et incompressible de masse volumique ρ ,

$$D_m \left(\Delta e_c + e_p + \frac{\Delta p}{\rho} \right) = P_u + P_{int} \quad (1)$$

Avec P_u la puissance des actions mécaniques utiles exercées par des parties solides et P_{int} celles des actions internes au fluide. La notation $\Delta x = x_2 - x_1$ désigne la différence aval-amont.

De même, un bilan de quantité de mouvement permet d'obtenir

$$D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_{ext} \quad (2)$$

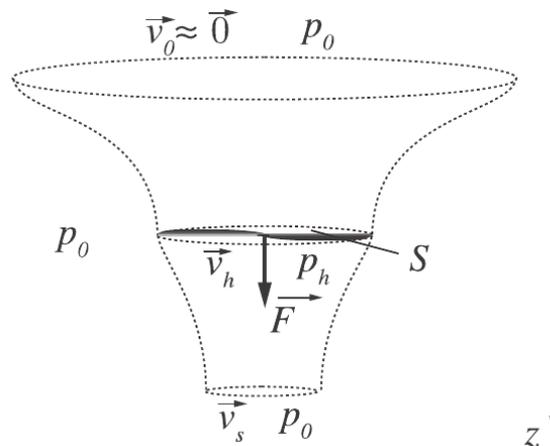
Avec \vec{F}_{ext} résultante des actions extérieures appliquées au système coïncidant avec le tube de courant.

Relation Puissance-Force pour une seule hélice

Nous considérons le flux stationnaire d'air, de masse volumique ρ supposée constante, mis en mouvement par une des hélices du drone. Une représentation schématique du tube de courant traversant l'hélice est proposée en figure 3. A l'entrée du tube de courant, l'air est immobile et la pression égale à la pression atmosphérique p_0 .

On note v_h la vitesse immédiatement en sortie de l'hélice et v_s la vitesse de l'air suffisamment en aval de l'hélice pour qu'il soit considéré à l'équilibre mécanique avec l'atmosphère ambiante ($p_s = p_0$).

L'hélice, balayant une section d'aire S , exerce sur l'air une force $\vec{F} = F\vec{z}$ tout en lui cédant une puissance mécanique $P_m = Fv_h$. On note $\vec{g} = g\vec{z}$, avec $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.



Question 1. Modélisation de l'écoulement d'air

- Justifier le choix d'une vitesse nulle à l'entrée du tube de courant (loin de l'hélice).
- Formuler une hypothèse supplémentaire sur la nature de l'écoulement permettant de négliger la puissance des actions internes P_{int} .
- En proposant des ordres de grandeurs cohérents de vitesse et de dénivelé, justifier qu'il est possible de négliger, en première approche, la variation d'énergie potentielle.

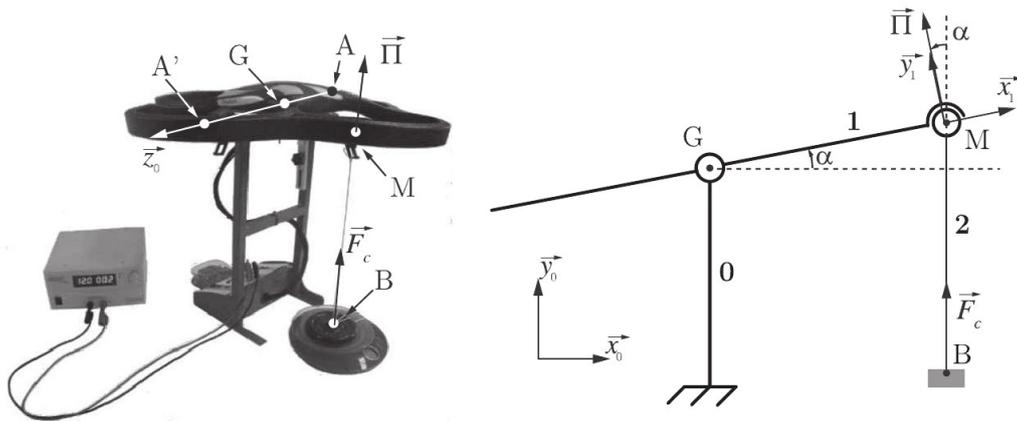
Question 2. En tenant compte de ces hypothèses, appliquer les relations (1) puis (2) au système afin d'exprimer P_m , puis F en fonction du débit massique D_m et de v_s . En déduire que $v_h = v_s/2$.

Question 3. Montrer que $P_m = \frac{1}{\sqrt{2\rho S}} F^{3/2}$. En déduire l'expression de la force $\vec{\pi}$ exercée par l'air sur l'hélice, en fonction de P_m , ρ , S et du vecteur unitaire \vec{z} .

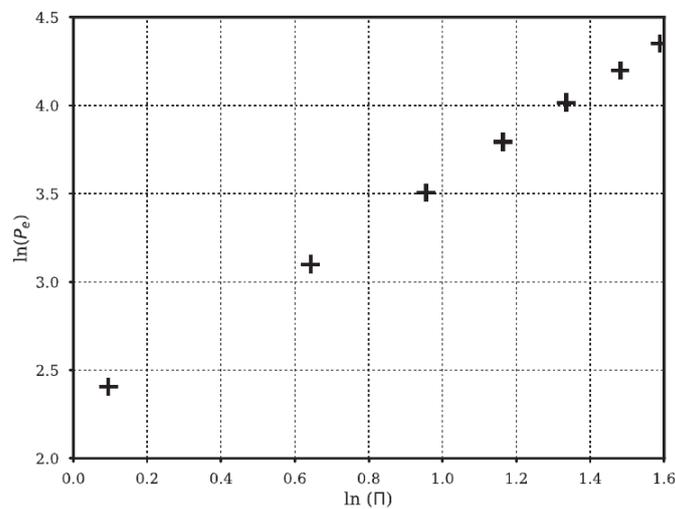
Afin de valider la relation obtenue en question 3, des mesures expérimentales de la force de sustentation $\vec{\pi}$ ont été réalisées. Le dispositif expérimental est décrit et schématisé en figure 4 : le drone 1, dont un seul moteur est actif, est maintenu à un banc 0 par deux liaisons pivots situées en A et A', l'axe de rotation (AA') passant par le centre de gravité G du drone. On note $\vec{z}_0 = \frac{\vec{AA}'}{\|\vec{AA}'\|}$.

La branche du drone comprenant le seul moteur en fonctionnement est reliée à une balance (faisant office de capteur de force) par un cordon vertical 2 de masse négligeable. On note $\vec{F}_c = F_c \vec{y}_0$ la force exercée par ce fil sur le capteur. Le point d'attache du cordon sur le drone et celui d'application de $\vec{\pi}$ sont supposés confondus en un même point M et $\vec{\pi} = \pi \vec{y}_1$ est orthogonale au vecteur $\vec{GM} = L \vec{x}_1$. Un défaut d'horizontalité est pris en compte et quantifié par l'angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. Le circuit d'électronique de puissance est alimenté par une source de tension remplaçant la batterie du drone ; l'interface utilisateur permet d'ajuster la vitesse de rotation de l'hélice et ainsi la puissance mécanique cédée à l'air.

Question 4. Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur le drone et le cordon. En déduire l'expression de la norme π de la force de sustentation en fonction de F_c et de α .



On relève π (en N) en fonction de la puissance électrique absorbée P_e (en W) et on trace $\ln(P_e)$ en fonction de $\ln(\pi)$ afin d'identifier la loi de puissance.



Question 5. En exploitant la figure ci dessus, justifier que $P_e = k\pi^q$ et estimer numériquement k et q .

Masse et autonomie en vol stationnaire

On considère un drone, de masse totale m , alimenté par une batterie de force électromotrice U et de capacité Q (en A.h) et disposant de quatre hélices et moteurs identiques. Chaque moteur absorbe une puissance P_e et chaque hélice reçoit une force de norme π , ces deux quantités étant reliées par la relation établie en question 5.

On définit l'autonomie Δt comme la durée d'une décharge complète de batterie lors d'un vol stationnaire ; on supposera que seuls les moteurs consomment de la puissance.

Question 6. Exprimer P_{stat} , la puissance totale consommée en vol stationnaire, en fonction de k, m, g et q .

En déduire l'autonomie Δt . Faire l'application numérique pour un drone Bebop 2 de masse $m = 500g$ alimenté par une batterie LiPo 3S de tension $U=11,1V$ et de capacité $Q=2.70$ A.h. On donne $q=1.3$ et $k=9.5$ SI.

L'autonomie décroissant fortement avec l'augmentation de la masse, il y a un réel intérêt à alléger le drone.

Exercice 2 Chimie : Allègement de la batterie d'un drone

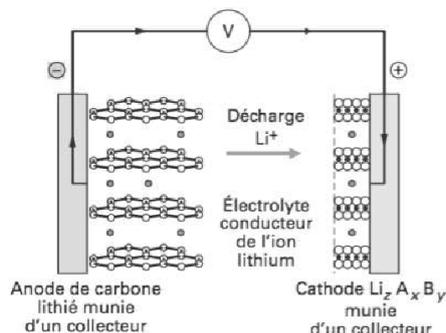
La part de la masse de la batterie dans celle d'un drone est conséquente : pour le Bebop 2, la masse de la batterie représente quasiment 40% de la masse du drone.

Les batteries installées sur les drones sont constituées de plusieurs accumulateurs lithium-ion (Li-ion) à électrolyte polymère (souvent abusivement nommés lithium-polymère ou LiPo). L'utilisation d'un électrolyte polymère non liquide permet de substituer au boîtier métallique rigide un sachet plastique souple et léger.

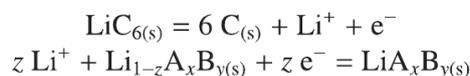
Le principe de l'accumulateur lithium-ion est décrit dans le document ci-dessous :

Document - Principe de fonctionnement d'un accumulateur lithium-ion

Le système électrochimique est constitué d'une électrode de graphite, jouant le rôle d'anode en décharge, d'un électrolyte non aqueux et d'une électrode (la cathode lors de la décharge) élaborée à partir d'un matériau appelé *composé d'insertion* A_xB_y , capable d'accueillir et de libérer des ions lithium de façon réversible.



Ainsi, durant la décharge, les ions lithium passent en solution à l'anode, migrent vers la cathode à travers l'électrolyte et s'insèrent dans le composé d'insertion selon les réactions électrochimiques suivantes :



NB : les flèches sur la figure ci-contre indiquent le sens de déplacement des électrons durant la décharge.

Sources : J. Robert et J. Alzieu, *Accumulateurs au lithium*, Techniques de l'Ingénieur (2005).

Dans le cas des batteries usuelles, le composé d'insertion A_xB_y est le dioxyde de cobalt $\text{CoO}_2(s)$. Ce composé seul étant très réactif, il est nécessaire d'y maintenir une part suffisante de lithium. Durant la décharge, la composition du solide cathodique passe de $\text{Li}_{0.5}\text{CoO}_2$ à LiCoO_2 .

La force électromotrice apparaissant entre les deux électrodes est $E=3.7\text{ V}$. On donne la valeur de la constante de Faraday $F=9.6\ 10^4\ \text{C/mol}$ et les masses molaires suivantes :

	Li	C	Si	CoO ₂
M (g/mol)	6.9	12.0	28.1	90.9

Question 1. Donner l'équation-bilan de la réaction d'oxydoréduction intervenant lors de la décharge puis celle intervenant en charge.

Question 2. Les réactifs sont présents en proportions stœchiométriques. Justifier ce choix. Exprimer alors la masse m_{accu} de réactifs présents dans un accumulateur en fonction de n , nombre de moles d'électrons échangés durant la décharge et des masses molaires.

Question 3. En déduire l'expression de q_{max} , capacité massique maximale (ou *capacité spécifique théorique*) d'un accumulateur, en fonction de F et des masses molaires. Donner sa valeur numérique en A.h/kg puis celle en W.h/kg de l'énergie massique associée.

La batterie 3S du Bebob 2 possède une capacité totale de 2700 mA.h, une masse de 180g et impose une tension $U=11.1\ \text{V}$.

Question 4. Par quelle association d'accumulateurs peut-on la modéliser ? Estimer la capacité massique d'un accumulateur et la comparer à q_{max} . Comment pourrait-on se rapprocher de cette capacité maximale ?

Pour augmenter la capacité massique des batteries, la recherche porte également sur les matériaux composant les électrodes. En particulier, des anodes de silicium (donnant pour une batterie chargée un alliage d'insertion LiSi_{0,22}) ou de lithium pur sont envisagées pour remplacer le graphite.

Question 5. A l'aide d'une application numérique, expliquer l'intérêt d'une anode en silicium ou en lithium pur. On pourra adapter la réponse à la question 312, la réaction de réduction à la cathode n'étant pas modifiée.

Exercice 3 – Probabilités

Selon la SNCF, 200 bagages sont oubliés chaque semaine dans les gares et les trains. Lorsqu'un bagage sans étiquette est abandonné et le propriétaire non identifié, le plan Vigipirate est déclenché avec l'intervention d'une équipe de déminage pour sa destruction. En 2021, 3000 trains ont été supprimés à cause d'un bagage abandonné impactant 12 millions de voyageurs.

Pour une étude de sécurité, on veut avoir une idée du nombre d'objets dangereux susceptibles d'être retrouvés dans un bagage. Pour ce faire, on a analysé un lot complet de 518 bagages. Le nombre d'objets considérés comme dangereux (objet coupant ou contondant, armes à feu même factices, briquets à combustion, cartouches d'imprimantes, ...) a été décompté dans chacun des bagages que nous considérerons comme identiques. Le tableau suivant a été obtenu :

Nombre d'objets dangereux : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de bagages : n_i	112	168	130	69	32	5	1	1

Pour un bagage choisi au hasard parmi les 518 bagages étudiés, on désigne par X la variable aléatoire qui rend pour valeur le nombre d'objets dangereux retrouvés.

Question 1. Calculer les probabilités $\text{prob}(X=k)$ pour les valeurs de k appartenant à $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Question 2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est la loi de Poisson de paramètre 1.55.

Question 3. Calculer les probabilités $\text{prob}(Y=k)$ pour les valeurs de k appartenant à $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Question 4. Pour une série de 518 observations d'un phénomène suivant la loi de Poisson de paramètre 1,55, calculer les effectifs correspondant aux valeurs entières de 0 à 7 de la variable observée (chaque effectif calculé est égal au produit de l'effectif total par la probabilité correspondante).

On admet que la probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans un train est de 0.005. Ce train transporte 850 voyageurs. On admettra que ces voyageurs se sont regroupés au hasard et que leurs comportements, par rapport à leurs bagages, sont indépendants les uns des autres. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de voyageurs ayant oubliés leurs bagages dans le train.

Question 5. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Question 6. Donner, en justifiant la réponse, une loi de probabilité permettant d'approcher la loi trouvée à la question précédente. En utilisant cette loi approchée, calculer une valeur approchée de la probabilité des événements suivants :

- a. Aucun voyageur n'a oublié ses bagages,
- b. Cinq voyageurs au moins ont oublié leurs bagages.

Formules nécessaires

Analyse de fonction :**Formule de Stirling :**

La **formule de Stirling**, du nom du **mathématicien** écossais **James Stirling**, donne un **équivalent** de la **factorielle** d'un **entier naturel** n quand n tend vers l'**infini** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1$$

que l'on trouve souvent écrite ainsi¹ :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

où le **nombre e** désigne la base de l'**exponentielle**.

Relation de Chasles :

Il existe aussi une relation de Chasles en **calcul intégral**.

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I , alors pour tous a , b et c dans I , on a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Probabilité :**Espérance mathématique:**

- Calcul direct
- Variable discrète :

$$E(X) = \sum_x x_i P(X = x_i)$$

- Variable continue :

$$E(x) = \int_{D_x} t f(t) dt$$

- Espérance d'une somme :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Variance:

- Variances conditionnelles :

$$V(X/Y) = E[X - E(X/Y)]^2 \quad V(Y/X) = E[Y - E(Y/X)]^2$$

- Théorème de la variance totale :

$$V(Y) = V[E(Y/X)] + E[V(Y/X)]$$

Lois de probabilités :

Lois de probabilités

Loi	Définition	Espérance	Variance
Uniforme	$P(X = x) = \frac{1}{n} \quad x \in \{1, 2, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x \in \{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
Pascal	$P(X = x) = p(1-p)^{1-x} \quad x \in \{1, 2, \dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomiale	$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad x \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	$np(1-p)$
Hyper-géométrique	$P(T = t) = \frac{C_{Np}^t C_{N-Np}^{n-t}}{C_N^n}$ $t \in \{\min(0, n - Np), \dots, \max(n, Np)\}$	np	$np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$
Poisson	$P(X = x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!} \quad x \in \{0, 1, \dots, n\}$	m	m

Théorème de Bayes

Informatique :

Rappel des syntaxes en Python :

Remarque: sous Python, l'import du module numpy permet de réaliser des opérations pratiques sur

les tableaux :
from
numpy
import*.
Les indices
de ces
tableaux

Annexe 2 - Rappels des syntaxes en Python

Remarque : sous Python, l'import du module numpy permet de réaliser des opérations pratiques sur les tableaux : from numpy import *. Les indices de ces tableaux commencent à 0.

	Python
tableau à une dimension	L=[1, 2, 3] (liste) v=array([1, 2, 3]) (vecteur)
accéder à un élément	v[0] renvoie 1
ajouter un élément	L.append(5) uniquement sur les listes
tableau à deux dimensions (matrice)	M=array([[1, 2, 3], [3, 4, 5]])
accéder à un élément	M[1, 2] ou M[1][2] donne 5
extraire une portion de tableau (2 premières colonnes)	M[:, 0:2]
tableau de 0 (2 lignes, 3 colonnes)	zeros((2, 3))
dimension d'un tableau T de taille (i, j)	T.shape donne [i, j]
séquence équirépartie quelconque de 0 à 10.1 (exclus) par pas de 0.1	arange(0, 10.1, 0.1)
définir une chaîne de caractères	mot="Python"
taille d'une chaîne	len(mot)
extraire des caractères	mot[2:7]
boucle For	for i in range(10): print (i)
condition If	if (i>3): print (i) else: print ("hello")
définir une fonction qui possède un argument et renvoie 2 résultats	def fonction(param): res1=param res2=param*param return res1, res2
tracé de points (o) de coordonnées (x,y)	plot(x, y, "o")

FIN

commencent à 0.

